ZOOLOGIA DEGLI INTEGRALI-formulario

A cura di Padovan Claudio (v. 1.01)

Proprietà dell'integrale (Linearità)

$$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx$$

$$\int f(x) + g(x) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$$

$$\int k \cdot f(x) + j \cdot g(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx + j \cdot \int g(x) \cdot dx$$

Integrazioni immediate

$\int k \cdot dx$	$k \cdot x + c$
$\int x^k \cdot dx, k \neq -1$	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + c$
$\int x^{-1} \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int \cos x \cdot dx$	$\sin x + c$
$\int \sin x \cdot dx$	$-\cos x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$	$\tan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$	$-\cot x + c$
$\int e^x \cdot dx$	$e^x + c$
$\int a^x \cdot dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$	$\arcsin x + c = -\arccos x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$	$\arctan x + c$

Integrazioni composte

$\int [f(x)]^k \cdot f'(x) \cdot dx, k \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{k+1}}{k+1} + c$
$\int [f(x)]^{-1} \cdot f'(x) \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{[f(x)]} \cdot dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx$	$\sin[f(x)] + c$
$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx$	$-\cos[f(x)] + c$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} \cdot dx$	$\tan[f(x)] + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]} \cdot dx$	$-\cot[f(x)] + c$

$\int \cos(\omega x + \varphi) \cdot dx$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$\int \sin(\omega x + \varphi) \cdot dx$	$\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx$	$e^{f(x)} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx, a > 0$	$\arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} \cdot dx$	$\arcsin[f(x)] + c = -\arccos[f(x)] + c$
$\int \frac{f'(x)}{m^2 + [f(x)]^2} \cdot dx$	$\frac{1}{m}\arctan\frac{f(x)}{m} + c$

Integrazione di alcune frazioni

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \cdot dx, \begin{cases} N(x) \text{ di grado } n \\ D(x) \text{ di grado } d \end{cases}$$

- Se $n \geq d$ si procede con la seguente divisione di polinomi:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \begin{cases} Q(x)\text{: quoziente} \\ R(x)\text{: resto} \end{cases}$$

Da cui si proseguirà con l’integrazione:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \cdot dx = \int Q(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} \cdot dx$$

- Se $n < d$ si procede esclusivamente con le seguenti condizioni: $\begin{cases} n = 0,1 \\ d = 2 \end{cases}$

Ottenendo così una frazione del tipo:

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} \cdot dx$$

In seguito si calcola il $\Delta = b^2 - 4ac$ del denominatore $D(x)$.
A seconda del valore del Δ si presentano tre casi:

- $\Delta > 0$

  Si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
  Di modo da risolvere l’integrale che assume la seguente forma:

$$\frac{1}{a} \cdot \left(\int \frac{A}{x - x_1} \cdot dx + \int \frac{B}{x - x_2} \cdot dx\right)$$

Con $\begin{cases} A = -\frac{px_1 + q}{x_2 - x_1} \\ B = \frac{px_2 + q}{x_2 - x_1} \end{cases}$

- $\Delta = 0$

  Si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)^2$
  Di modo da risolvere l'integrale che assume la seguente forma:

$$\frac{1}{a} \cdot \left(\int \frac{A}{x - x_1} \cdot dx + \int \frac{B}{(x - x_1)^2} \cdot dx \right)$$

  Con $\begin{cases} A = p \\ B = -\dfrac{px_1 + q}{x_1} \end{cases}$

- $\Delta < 0$

  Stante questa condizione, otteniamo due sottocasi:

  - Qualora $p \neq 0$, l'integrale assume la seguente forma:

$$\frac{p}{2a} \cdot \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} \cdot dx + \int \frac{q - \frac{pb}{2a}}{ax^2 + bx + c} \cdot dx$$

    Di cui la prima parte è agevolmente integrabile
    Il secondo integrale assume una forma del tipo:

$$\int \frac{q - \frac{pb}{2a}}{ax^2 + bx + c} \cdot dx = \int \frac{r}{ax^2 + bx + c} \cdot dx$$

    Con $r = q - \frac{pb}{2a}$

    Per la risoluzione si passa al secondo sottocaso riportato qui di seguito.

  - Qualora $p = 0$ si procede alla scomposizione del denominatore che, ricostituito dà vita all'integrale:

$$a \cdot q \cdot \int \frac{1}{(x + k)^2 + m^2} \cdot dx$$

    Con $\begin{cases} k = \frac{b}{2a} \\ m = \frac{-\Delta}{4a^2} \end{cases}$

Integrali per sostituzione

N.B.: Questo metodo di integrazione è <u>*utile*</u> *maggiormente* <u>*in presenza di un radicale*</u> *che, sostituito interamente da una variabile* t*, può rendere più agevole l'integrazione.*

Integrazione per parti

In presenza di due funzioni moltiplicate, possiamo considerarne una come derivata e utilizzare quindi la seguente regola:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx$$

N.B.: Questo metodo di integrazione è <u>prevalentemente utilizzato in presenza di esponenziali e logaritmi</u> in particolare quando questi moltiplicano funzioni non trascendenti; in questi casi è utile <u>considerare gli esponenziali come f'(x)</u>, mentre <u>i logaritmi come g(x)</u>.
L'integrazione per parti, in certi casi, è utilizzata anche in presenza di seni e coseni; spesso si richiede di applicare la regola due volte nella stessa integrazione.

Integrali di particolari funzioni irrazionali (*Soluzioni di Eulero*)

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx$$

Esaminiamo due casi distinti:

- $a > 0$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx = \int 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{a} \cdot t^2 + b \cdot t + \sqrt{a} \cdot c\right)^2}{\left(b + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot t\right)^3} \cdot dt$$

- $a < 0$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx = \int 2a^2 t \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2}{(a - t^2)^3} \cdot dt$$

Dove x_1 e x_2 sono le soluzioni del trinomio $ax^2 + bx + c$.