K.I.M. – STUDIO DI FUNZIONE

A cura di Padovan Claudio (v. 2.00)

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

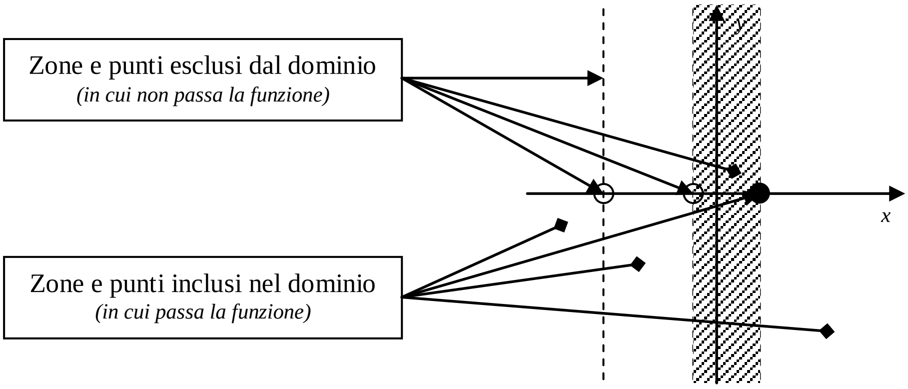
1.DOMINIO

Il dominio è definito <u>come l'insieme di valori di *x* per cui esiste la funzione</u>. Bisogna perciò sincerarsi che non si presentino valori per i quali si verifica una delle seguenti condizioni: denominatori che si annullano, radici di indice pari con radicandi negativi, logaritmi con argomenti negativi o uguali a zero. Si devono imporre perciò le seguenti condizioni:

Condizioni di Esistenza (C.E.)

- $se\ f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \boldsymbol{D(x) \neq 0}$
- $se\ f(x) = \sqrt[2n]{R(x)}, n \in \mathbb{N} \rightarrow \boldsymbol{R(x) \geq 0}$
- $se\ f(x) = \log_a A(x) \rightarrow \boldsymbol{A(x)} > 0$
- $se\ f(x) = \arcsin A(x)\ oppure\ \arccos A(x) \rightarrow \boldsymbol{0 \leq A(x) \leq 1}$

Intersecando le condizioni in un sistema si ottiene il **dominio** della funzione. Per i punti estremi degli intervalli compresi nel dominio si usano parentesi quadre, se esclusi dal dominio si usano parentesi tonde. Sul piano cartesiano possono essere già eliminate le parti escluse dal dominio.

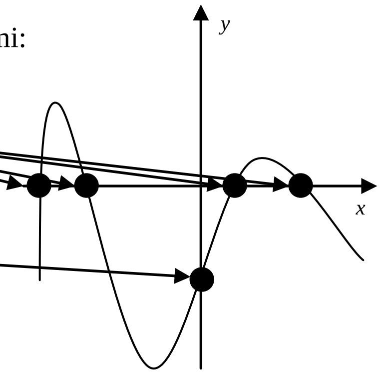


2.INTERSEZIONE CON GLI ASSI

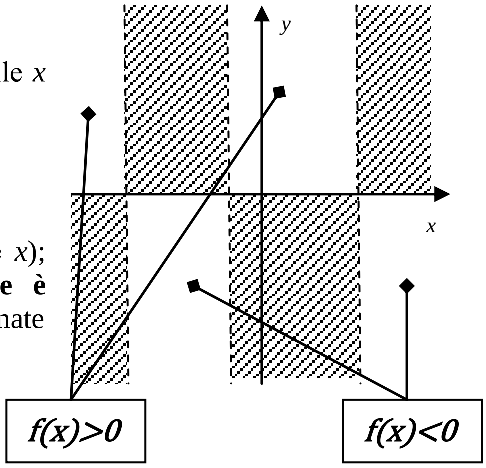
L'intersezione della funzione con gli assi *x* e *y* viene eseguita con due sistemi:

Intersezione con asse *x*: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0}$

Intersezione con asse *y*: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y = f(0)}$



3.STUDIO DEL SEGNO (*POSITIVITÀ*)

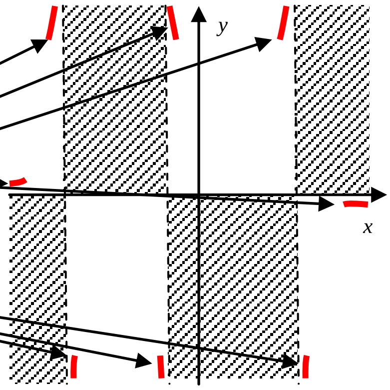


Studiamo quando la funzione si trova sopra e quando sotto l'asse delle *x* tramite una disequazione:

$$f(x) > 0$$

La soluzione definirà quando **la funzione è positiva** (sopra l'asse *x*); simmetricamente la parte restante definirà quando **la funzione è negativa** (sotto l'asse *x*). Sul piano cartesiano possono essere eliminate le parti (sotto o sopra rispettivamente) dove la funzione non passa.

4.LIMITI

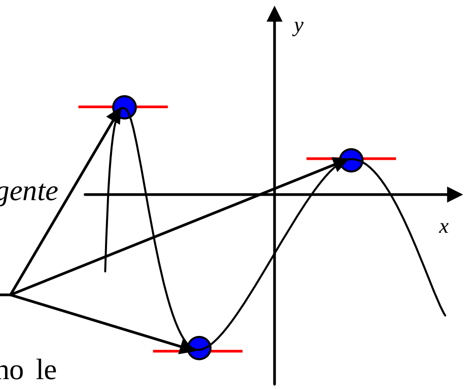


Nei punti estremi degli intervalli del dominio <u>non compresi</u> nello stesso si calcolano i limiti:

- Per limiti all'infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x)$
- Per limiti finiti: $\lim_{x\to c} f(x)$

Sul piano cartesiano possono essere segnati dei brevi tratti nei pressi delle soluzioni dei limiti.

5.DERIVATA PRIMA E STUDIO DEI PUNTI STAZIONARI



La derivata prima analizza l'andamento della <u>pendenza</u> della funzione.
Calcolo della derivata della funzione:

$$y' = [f(x)]'$$

Poniamo la derivata uguale a zero per ottenere i punti stazionari (*a tangente orizzontale*):

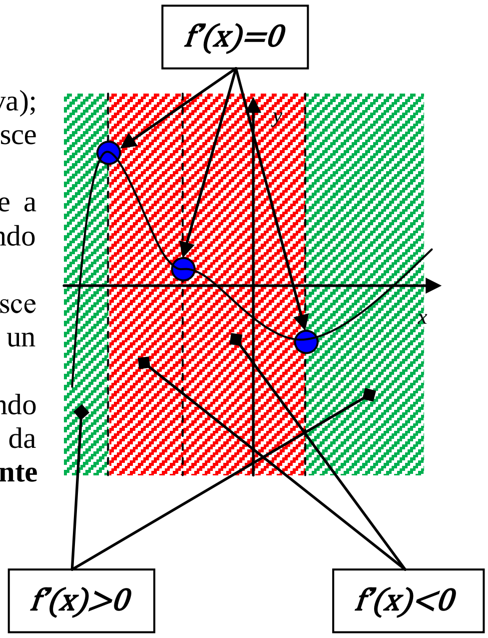
$$y' = 0$$

Risostituendo le soluzioni ottenute nella funzione iniziale si ottengono le ordinate dei punti stazionari.

6.STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA E ANALISI DI MASSIMI, MINIMI, FLESSI A TANGENTE ORIZZONTALE

Lo studio del segno della derivata prima ci permette di capire quando la funzione iniziale cresce e quando decresce. Studiamo perciò la seconda disequazione:

$$y' > 0$$

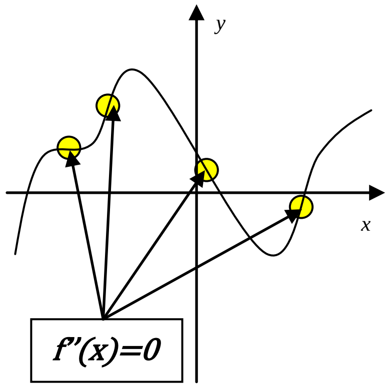


La soluzione definirà quando la funzione cresce (derivata positiva); simmetricamente la parte restante definirà quando la funzione decresce (derivata negativa).
Qualora nell'intorno di un punto stazionario, cioè a derivata uguale a zero, la funzione cresce giungendo da sinistra e decresce proseguendo verso destra, il punto è un **massimo** della funzione.
Qualora nell'intorno di un punto stazionario la funzione decresce giungendo da sinistra e cresce proseguendo verso destra, il punto è un **minimo** della funzione.
Qualora nell'intorno di un punto stazionario la funzione cresce giungendo da sinistra e proseguendo verso destra oppure decresce giungendo da sinistra e proseguendo verso destra, il punto è un **flesso a tangente orizzontale** della funzione.

7.DERIVATA SECONDA

La derivata seconda analizza l'andamento della <u>concavità</u> della funzione.
Calcolo della derivata seconda della funzione (ovvero derivata della derivata prima):

$$\boldsymbol{y'' = [f(x)]''}$$

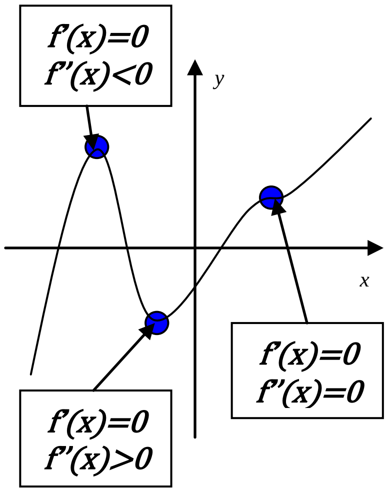


Poniamo la derivata uguale a zero per ottenere i punti di flesso:

$$\boldsymbol{y'' = 0}$$

Se un punto è già stato ottenuto con l'azzeramento della derivata prima, si conferma che esso sia un **flesso a tangente orizzontale**. Altrimenti, il punto è un **flesso a tangente obliqua**.
Risostituendo le soluzioni ottenute nella funzione iniziale si ottengono le ordinate dei punti di flesso.

8.ANALISI DI MASSIMI E MINIMI CON DERIVATA SECONDA

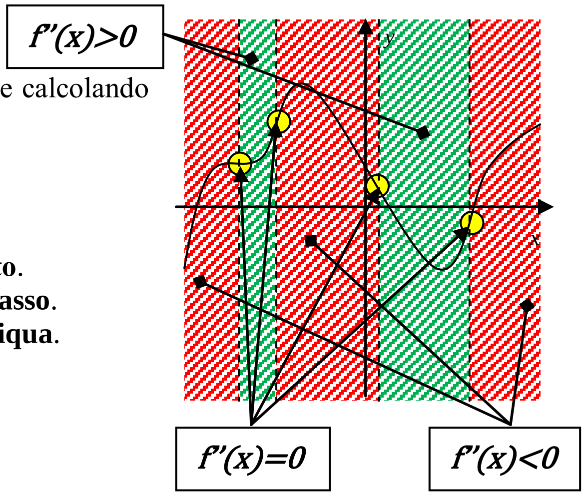


E' possibile analizzare i punti stazionari senza utilizzare il segno della derivata prima (punto 6.) inserendone le coordinate ***x*** nella derivata seconda e verificandone il valore:

$$\boldsymbol{y''(x)}$$

Qualora il valore fosse positivo, il punto stazionario è un **minimo** della funzione.
Qualora il valore fosse negativo, il punto stazionario è un **massimo** della funzione.
Qualora il valore fosse nullo, il punto stazionario è un **flesso a tangente orizzontale** della funzione.

9.ANALISI DELLA CONCAVITA’ CON DERIVATA SECONDA



E’ possibile analizzare la concavità in ogni punto della funzione calcolando la derivata seconda nel punto considerato:

$$y''(x) > 0$$

Qualora il valore fosse positivo, il punto ha concavità **verso l’alto**.
Qualora il valore fosse negativo, il punto ha concavità **verso il basso**.
Qualora il valore fosse nullo, il punto è un **flesso a tangente obliqua**.

APPENDICE – STUDIO DEGLI ASINTOTI

Nelle funzioni possono talora presentarsi degli asintoti. Essi possono essere di tre tipologie: **asintoti verticali**, **asintoti orizzontali** e **asintoti obliqui**.

- **Asintoti verticali**: si verificano ogni qualvolta nel calcolo dei limiti si presentino i seguenti casi:

  $$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

  In particolare l'asintoto assumerà l'equazione di una retta verticale: $x = c$

- **Asintoti orizzontali**: si verificano ogni qualvolta nel calcolo dei limiti si presentino i seguenti casi:

  $$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = l$$

  In particolare l'asintoto assumerà l'equazione di una retta orizzontale: $y = l$

- **Asintoti obliqui**: condizione necessaria (<u>ma non sufficiente!</u>) per la presenza di un asintoto obliquo è la presenza di un limite di questo tipo:

  $$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$$

  Se esiste, l'asintoto assumerà la forma di una retta con un'equazione del tipo:

  $$y = mx + q$$

  Si può quindi cercare ora di trovare il coefficiente angolare ***m*** della retta:

  $$m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x}$$

  (*) oppure, in alternativa, si può ricavare *m* mediante limite della derivata prima:

  $$m^* = \lim_{x \to \mp\infty} y'(x)$$

  <u>Se e solo se $m \neq 0 \wedge m \neq \infty$</u> si può cercare di trovare il termine noto ***q***:

  $$q = \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - mx]$$

  <u>Se e solo se $q \neq \infty$</u>, l'asintoto obliquo esiste.